ẢNH HƯỞNG CỦA PHÂN BỐ RỜI RẠC ĐIỆN TÍCH LÊN ĐẶC TÍNH ĐIỆN TRƯỜNG CỦA TỤ ĐIỆN PHẲNG

Vũ Huy Toàn

Viện khoa học và công nghệ Việt nam,
18 Hoàng Quốc Việt, Quận Cầu giấy, Hà nội, Việt nam

Tóm tắt. *Điện trường đồng nhất trong tụ điện phẳng được sử dụng trong nhiều nghiên cứu khác nhau đối với hạt cơ bản. Đặc tính của nó ảnh hưởng tới kết quả những phép đo gián tiếp trong đó cần sự có mặt của thông số cường độ điện trường. Trong những yếu tố gây nên sai số cho việc xác định thông số này có sự phân bố điện tích rời rạc trên mặt phẳng tụ mà vẫn được giả thiết một cách gần đúng là liên tục. Có thể do khối lượng tính toán quá lớn không thể thực hiện được mà cho đến nay chưa thấy có một công trình nào nghiên cứu đánh giá chính xác về sai số đó. Tuy nhiên, với sự trợ giúp của máy tính điện tử, dựa vào tính đối xứng của tụ điện phẳng và bằng phương pháp quy nạp không đầy đủ, tác giả đã đánh giá được sai số này. Đây chính là thành phần sai số hệ thống của các phép đo nói trên, cho đến nay, chưa được loại trừ. Độ lớn không ngờ của thành phần sai số này so với sai số đo được coi là "đã được đánh giá" khiến người ta phải suy nghĩ!*

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Để đo các thông số của hạt cơ bản như khối lượng, vận tốc… cần phải có một điện trường đồng nhất do một tụ điện phẳng tạo nên. Dựa vào định luật Ostrogratsky- Gauss:

$$\oint_{(S)} E ds = q/\varepsilon_0 , \qquad (1)$$

với vế trái của (1) là dòng cường độ điện trường xuyên qua bất kỳ một mặt kín (S) nào, trong đó có chứa điện tích q, với giả thiết điện tích q phân bố đều với mật độ σ và liên tục trên các bề mặt của một tụ điện phẳng có kích thước các má tụ lớn vô cùng ở cách nhau một khoảng h, người ta đã tính được cường độ điện trường là như nhau ở mọi điểm bên trong và ngay cả trên bề mặt tụ điện:

$$E = \sigma/\varepsilon_0 = 4\pi k\sigma, \qquad (2)$$

$k = 1/4\pi\varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$ F/m - hằng số điện môi của chân không. Trên thực tế, công thức (2) được áp dụng cả trong trường hợp tụ điện có kích thước $L\times L$ là hữu hạn nếu $h << L$. Khi đó:

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{L^2} . \qquad (3)$$

Từ đây, có khái niệm *hiệu điện thế giữa hai mặt* tích điện:

$$U_{ab} = Eh , \qquad (4)$$

vì điện thế của mọi điểm trên bề mặt má tụ được coi là như nhau. Từ (4) có thể rút ra công thức tính cường độ điện trường thông qua các đại lượng có thể đo được là U_{ab} và h:

$$E = \frac{U_{ab}}{h}. \tag{5}$$

Cường độ điện trường tính theo (5) được sử dụng trong các công thức tính toán khối lượng cũng như vận tốc của các hạt cơ bản [1] với sai số được đánh giá là không lớn hơn 10^{-6} [2].

Ai cũng biết, điện tích (q) không thể liên tục và không thể phân bố liên tục; nó chỉ có thể là bội lần (N) của điện tích nguyên tố $q_e \approx 1{,}6\times10^{-19}$ C, và trong không gian, nó là tập hợp của N điện tích nguyên tố trên các khoảng cách xác định. Do đó, việc áp dụng Định luật Ostrogratsky-Gauss chỉ là một sự gần đúng hoá, chắc chắn phải gặp một sai số nhất định nào đó. Vấn đề là sai số đó bằng bao nhiêu? Từ trước đến nay, chưa thấy có một công trình nghiên cứu nào về vấn đề này.

Trên bề mặt tụ điện phẳng vừa nêu ở trên, các điện tích nguyên tố này không thể phân bố dầy đặc hơn mật độ phân bố của các phân tử tạo nên bề mặt đó. Mật độ này trên thực tế không vượt quá 10^9/m^2, bởi vì khoảng cách giữa các phân tử (nguyên tử) không nhỏ hơn 10^{-9} m. Theo nguyên lý xếp chồng, có thể tính cường độ điện trường tại một điểm gây nên bởi từng điện tích q_e riêng rẽ ở cách xa điểm đó một khoảng bằng L_i rồi lấy tổng:

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i .$$

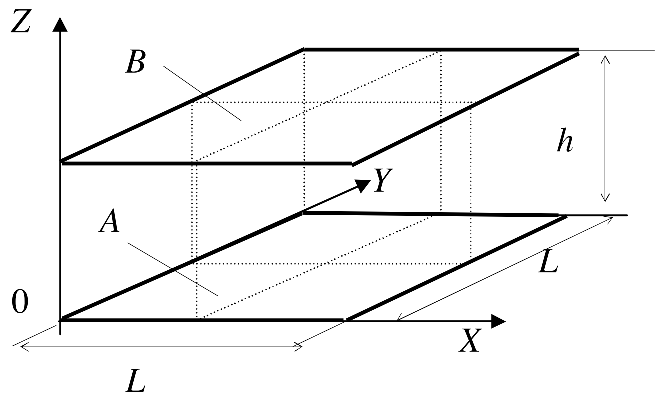
Tuy nhiên, khi đó sẽ gặp phải một khối lượng tính toán khổng lồ với N đạt tới giá trị 10^6-10^{17}, điều mà không một nhà lý thuyết nào cho đến nay muốn thử sức.

Điều gì sẽ xẩy ra nếu tính đến yếu tố phân bố điện tích rời rạc này trong quá trình tính toán cường độ điện trường với sự sự trợ giúp của máy tính điện tử? Khi đó liệu công thức (2) có còn đúng nữa không, đặc biệt là với kích thước tụ điện L luôn hữu hạn? Và nếu không thì liệu điện trường trong tụ điện phẳng nói trên có còn đồng nhất nữa hay không? Đặc biệt là các khái niệm *cường độ điện trường* hay *điện thế* tại "bề mặt" của một vật xác định theo (3) có nghĩa gì không bởi điện tích đâu có phân bố liên tục trên cái gọi là "bề mặt" của một vật? Cuối cùng, những thông số của các hạt cơ bản như khối lượng hay vận tốc của chúng được xác định gián tiếp thông qua những đại lượng này sẽ ra sao? Điều này thật sự rất quan trọng vì nó quyết định tới độ chính xác của bức tranh thế giới vi mô mà cơ học lượng tử thu được sau cái gọi là các *bằng chứng thực nghiệm.*

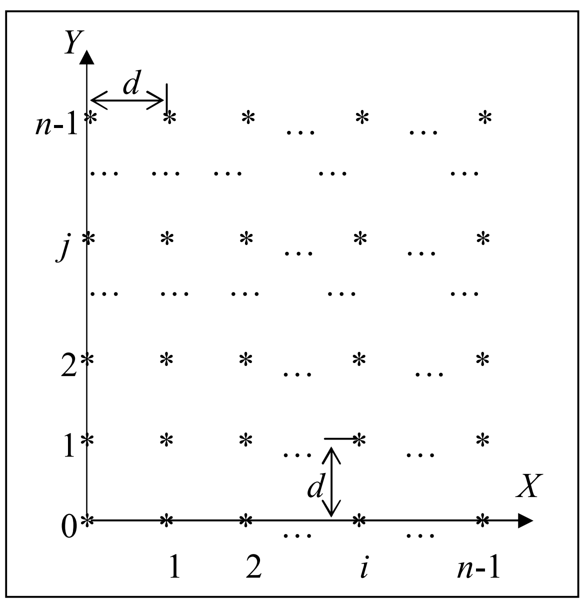
II. CƯỜNG ĐỘ ĐIỆN TRƯỜNG TRONG TỤ ĐIỆN PHẲNG

1. Đặt vấn đề

Giả sử có một tụ điện phẳng như đã nói tới ở Mục I, được mô tả trên Hình 1a. Để đơn giản, ta sẽ coi như các điện tích q_e trên má tụ phân bố tại các điểm được đánh dấu (*) cách đều nhau một khoảng bằng d theo cả 2 chiều: chiều trục X (tương ứng là điện tích thứ 1, 2, 3, ... i) và chiều trục Y (tương ứng là điện tích thứ 1, 2, 3, ...j) như trên Hình 1b, trong đó không kể điện tích tại góc tụ (coi như $i = j = 0$)



a)



b)

Hình 1.

Với cách phân bố điện tích như vậy, có thể xác định các kích thước của tụ điện theo khoảng cách d giữa các điện tích như sau: $L = (n\text{-}1)d$, ở đây n - là số lượng điện tích phân bố theo các trục $0X$ hoặc trục $0Y$ tương ứng. Để có thể tính cường độ điện trường tại một điểm bất kỳ $M(x,y,z)$ nào đó trong tụ điện này gây nên bởi toàn bộ $2N$ điện tích trên cả hai má tụ, ta đưa vào một hệ trục toạ độ XYZ với gốc toạ độ 0 nằm trên một góc tụ, trùng với một điện tích trên mặt phẳng tụ A sao cho trục $0X$ và $0Y$ trùng với hai cạnh của má tụ A, còn trục $0Z$ hướng lên trên về phía má tụ B như trên Hình 1a. Khi đó, cường độ điện trường tại điểm $M(x,y,z)$ gây nên bởi điện tích $q_{ea}(i,j)$ tức là điện tích nằm ở vị trí có toạ độ là $x_{ea} = id$, $y_{ea} = jd$ và $z_{ea} = 0$ (xem trên Hình 2) được xác định theo công thức:

$$E_{aij} = (E^2_{axij} + E^2_{ayij} + E^2_{azij})^{1/2}\ , \qquad (6)$$

ở đây: $E_{axij} = E_{aij}\cos(\alpha_{aij}) = kq_e(x\text{-}id)/[z^2 + (x - id)^2 + (y - jd)^2]^{3/2}$; (7)

$$E_{ayij} = E_{aij}\cos(\beta_{aij}) = kq_e(y - jd)/[z^2 + (x - id)^2 + (y - jd)^2]^{3/2}\ ; \qquad (8)$$

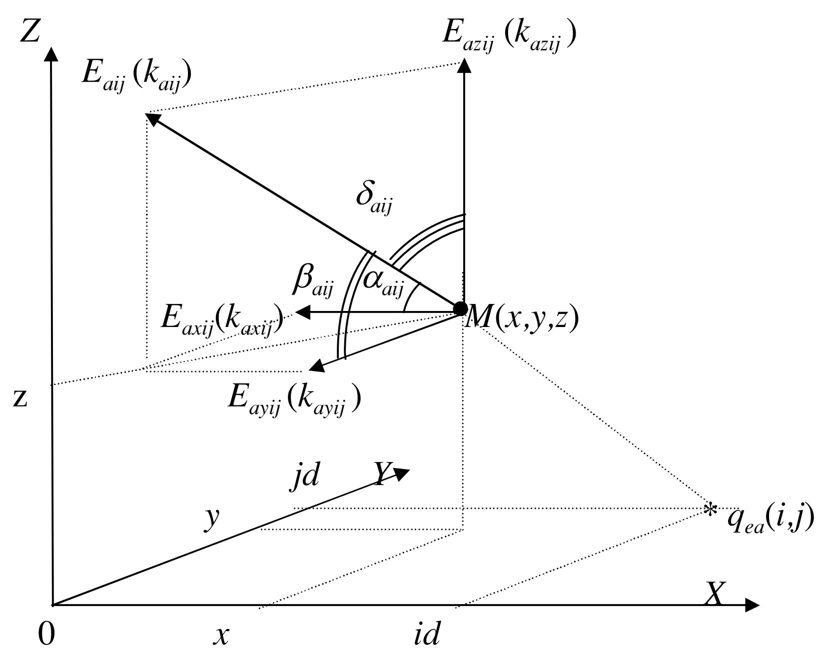
$$E_{azij} = E_{aij}\cos(\delta_{aij}) = kq_e z/[z^2 + (x - id)^2 + (y - jd)^2]^{3/2}\ ; \qquad (9)$$

Có thể biến đổi (6), (7) và (8) về dạng thuận tiện hơn:

$$E_{axij} = (kq_e/d^2)(x/d - i)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (z/d)^2]^{3/2}\ ; \qquad (10)$$

$$E_{ayij} = (kq_e/d^2)(y/d - i)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (z/d)^2]^{3/2}\ ; \qquad (11)$$

$$E_{azij} = (kq_e/d^2)(z/d)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (z/d)^2]^{3/2}\ ; \qquad (12)$$



Hình 2.

Đặt: $$E_d = kq_e/d^2, \tag{13}$$

và: $$k_{axij} = (x/d - i)/[(x/d- i)^2 + (y/d - j)^2 + (z/d)^2]^{3/2}, \tag{14}$$

$$k_{ayij} = (y/d - j)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (z/d)^2]^{3/2}, \tag{15}$$

$$k_{azij} = (z/d)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (z/d)^2]^{3/2}. \tag{16}$$

Ta có thể viết lại: $E_{axij} = k_{axij}E_d$; $E_{ayij} = k_{ayij}E_d$; $E_{azij} = k_{azij}E_d$.

Khi đó, theo nguyên lý xếp chồng ta có:

$$E_{ax} = E_d \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{axij} = k_{ax}E_d, \quad E_{ay} = E_d \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{ayij} = k_{ay}E_d, \quad E_{az} = E_d \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{azij} = k_{az}E_d,$$

ở đây: $$k_{ax} = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{axij}; \quad k_{ay} = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{ayij}; \quad k_{az} = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{azij}. \tag{17}$$

Và do đó, cường độ điện trường tại điểm $M(x,y,z)$ do toàn bộ điện tích trên má tụ A gây nên bằng :

$$E_a = (E^2_{ax} + E^2_{ay} + E^2_{az})^{1/2} = E_d(k^2_{ax} + k^2_{ay} + k^2_{az})^{1/2} = k_aE_d, \tag{18}$$

ở đây: $$k_a = (k^2_{ax} + k^2_{ay} + k^2_{az})^{1/2}. \tag{19}$$

Góc lệch δ_a của véc tơ E_a (hay k_a) so với phương thẳng đứng - véc tơ E_{az} (hay k_{az}) có thể tính được:

$$\delta_a = \arccos(k_{az}/k_a). \tag{20}$$

Tương tự như vậy, có thể tính được cường độ điện trường tại điểm $M(x, y, z)$ gây ra bởi các điện tích trên má tụ B. Khi đó, trong các công thức từ (6) đến (20) tất cả các đại lượng có chỉ số "a" đều được thay bằng chỉ số "b", còn z được thay bằng $(h - z)$, cụ thể là:

$$k_{bxij} = (x/d - i)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (h/d - z/d)^2]^{3/2}, \tag{21}$$

$$k_{byij} = (y/d - j)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (h/d - z/d)^2]^{3/2}, \tag{22}$$

$$k_{bzij} = (h/d - z/d)/[(x/d - i)^2 + (y/d - j)^2 + (h/d - z/d)^2]^{3/2}, \tag{23}$$

$$k_{bx} = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{bxij}, \quad k_{by} = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{byij}, \quad k_{bz} = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n-1} k_{bzij}. \tag{24}$$

$$E_b = (E^2_{bx} + E^2_{by} + E^2_{bz})^{1/2} = E_d(k^2_{bx} + k^2_{by} + k^2_{bz})^{1/2} = k_bE_d, \tag{25}$$

$$k_b = (k^2_{bx} + k^2_{by} + k^2_{bz})^{1/2}. \tag{26}$$

Cuối cùng, với tác động của cả 2 má tụ ta có:

$$E_M = (E_a^{\ 2} + 2E_aE_b\cos\delta_{ab} + E_b^{\ 2})^{1/2} =$$

$$= E_d(k_a{}^2 + 2k_ak_b\cos\delta_{ab} + k_b{}^2)^{1/2} = k_M E_d, \quad (27)$$

$$k_M = (k_a{}^2 + 2k_ak_b\cos\delta_{ab} + k_b{}^2)^{1/2}, \quad (28)$$

$$E_z = E_{az} + E_{bz} = E_d(k_{az} + k_{bz}) = k_z E_d, \quad (29)$$

$$k_z = k_{az} + k_{bz}\ , \quad (30)$$

$$\delta_M = \arccos(k_z/k_M). \quad (31)$$

Trong các công thức (29) và (30) xuất hiện góc δ_{ab} giữa hai véc tơ E_a và E_b (tương ứng là k_a và k_b), về nguyên tắc khó có thể xác định được trong trường hợp tổng quát. Tuy nhiên, nếu xem xét cường độ điện trường trên các mặt phẳng đối xứng của tụ điện như mặt phẳng đi qua tâm của tụ điện và các đường $y = L/2$ hay $x = L/2$ (xem trên Hình 1a) thì các góc δ_a và δ_b luôn nằm trên cùng chính các mặt phẳng đó, do đó có thể tính được $\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$. Khi đó các biểu thức (29) và (30) là hoàn toàn xác định. Hơn nữa, trên thực tế, người ta cũng thường sử dụng điện trường trong phạm vi này để khảo sát chuyển động của các hạt cơ bản và đo đạc các thông số của chúng. Mặc dù vậy, về nguyên tắc, vẫn cần một khối lượng tính toán rất lớn, không ít hơn: $2\times3\times n\times n$.

Trên thực tế, tính toán trên máy PENTUM IV 2,8 GHz cho thấy, với $n = 10^4$ cần $t = 825\ s$. Khi đó, nếu tụ điện có kích thước $L = 1$ m và mật độ điện tích đạt mức tương ứng với $d = 10^{-6}$ m (tức là tương đương với $E \approx$ 1,44 kV/m) thì $n = L/d = 10^6$ và thời gian tính toán cần $t_2 = (10^6/10^4)^2 t_1 = 825\times10^4$ s $\approx$ 3,18 tháng! Một khoảng thời gian tương đối lớn, không khả thi. Vì vậy, ta sẽ không xem xét trường hợp chung mà đi tìm những trường hợp riêng khả dĩ để máy tính làm việc với $n \le 10^5$, song biết đâu có thể tìm thấy những quy luật, nhờ đó chúng ta có được bức tranh gần với thực tế hơn? Mặt khác, nếu thay (3) vào (2), lưu ý tới (13) ta có:

$$E = 4\pi k(q/L\times L) = 4\pi k(Nq_e/n^2d^2) = 4\pi kq_e/d^2 = 4\pi E_d. \quad (32)$$

Biểu thức (32) này hoàn toàn tương đương với biểu thức (2) nếu coi d là đại lượng liên tục, có thể nhỏ bao nhiêu tuỳ ý. Đối chiếu cường độ điện trường khi phân bố điện tích là liên tục (33) với biểu thức tính toán cường độ điện trường E_z khi phân bố điện tích rời rạc (30) ta nhận thấy sự khác nhau giữa chúng chỉ là ở hệ số đứng trước E_d. Vì vậy, mọi tính toán bây giờ quy về chỉ là xác định sự sai khác giữa 2 hệ số này, tức là giữa k_z với 4π:

$$\gamma_z = 100(k_z - 4\pi)/4\pi\ (\%). \quad (33)$$

Ta gọi γ_z là "Hệ số bất đồng nhất" của điện trường trong tụ điện phẳng nó hoàn toàn không phụ thuộc vào giá trị của cường độ điện trường mà chỉ còn phụ thuộc vào các kích thước của tụ điện (h, L) và các toạ độ x, y, z của điểm đang khảo sát nữa mà thôi. Dùng γ_z để khảo sát điện trường trong tụ điện phẳng sẽ giảm đáng kể khối lượng tính toán, số lượng biến độc lập và do đó tăng tốc độ tính của máy tính.

2. Điện trường trên đường trục giữa vuông góc với 2 má tụ

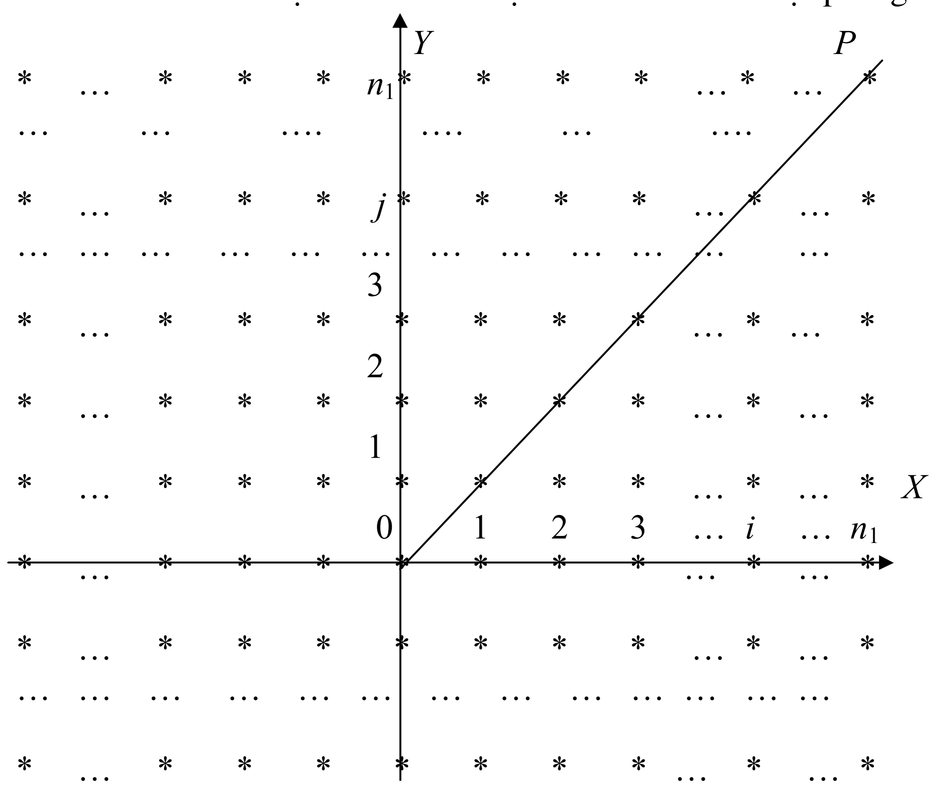
Mọi điểm trên đường này đều có toạ độ:

$$x = y = L/2 = (n\text{-}1)d/2, \qquad (34)$$

chỉ có z là biến số có giá trị từ 0 đến h. Trong trường hợp này, tốt nhất ta nên dời gốc tọa độ về điểm giữa của má tụ để lợi dụng tính đối xứng theo phương $0X$ và $0Y$, nhằm giảm khối lượng tính toán. Khi đó ta có $x = y = 0$ với 3 phương án tương đối đặc trưng sau đây.

a). *Trục 0Z đi qua đúng vị trí một điện tích*

Theo Hình 3 ta có nhận xét là các trục $0X$ và $0Y$ chia mặt phẳng tụ



Hình 3. Trục $0Z$ trùng với 1 điện tích.

Nếu không tính đến các điện tích nằm trên các đường này và điện tích tại gốc toạ độ 0 thì mỗi phần đều chứa cùng một số điện tích như nhau và luôn có từng cặp đối xứng nhau qua gốc toạ độ 0, qua trục $0X$ hay trục 0Y. Do đó, $k_x = k_y = 0$, chỉ còn k_z nên khối lượng tính toán nhỏ hơn gần 3×8 = 24 lần.

+ Riêng điện trường tại điểm giữa $z = h/2$, ta có $k_a = k_b$ nên khối lượng tính toán lại giảm tiếp thêm 2 lần nữa. Thay vì phải chạy mất 3,18 tháng, máy tính chỉ còn cần phải chạy mất 825s×10^4/48 ≈ 48 giờ, khoảng thời gian khả thi hơn nhiều.

Khi đó, đặt $h/d = m$, viết lại (14)÷(17) cho điểm này với lưu ý biến i và j chạy từ 2 đến $n_1 = (n+1)/2$:

$$k_{axij} = k_{bxij} = (i\text{-}1)/[(i\text{-}1)^2 + (j\text{-}1)^2 + (m/2)^2]^{3/2}, \qquad (35)$$

$$k_{ayij} = k_{byij} = (j\text{-}1)/[(i\text{-}1)^2 + (j\text{-}1)^2 + (m/2)^2]^{3/2}, \qquad (36)$$

$$k_{azij} = k_{bzij} = m/2[(i\text{-}1)^2 + (j\text{-}1)^2 + (m/2)^2]^{3/2}, \qquad (37)$$

$$k_{ax} = \sum_{\substack{i=2\\ j=2}}^{n_1} k_{axij} = k_{ay} = \sum_{\substack{i=2\\ j=2}}^{n_1} k_{ayij} = 0; \quad k_{az} = \sum_{\substack{i=2\\ j=2}}^{n_1} k_{azij}\,. \qquad (38)$$

$$k_{bx} = \sum_{\substack{i=2\\ j=2}}^{n_1} k_{bxij} = k_{by} = \sum_{\substack{i=2\\ j=2}}^{n_1} k_{byij} = 0, \quad k_{bz} = \sum_{\substack{i=2\\ j=2}}^{n_1} k_{bzij}\,. \qquad (39)$$

Vì $k_{az} = k_{bz}$, nên ta có: $k_z = 2k_{az}$. Với tính đối xứng đã nói ở trên, ta có thể biểu diễn tổng (38) thành 3 tổng con nhằm giảm khối lượng tính toán:

- Cho các điện tích nằm trên trục 0X, không kể gốc toạ độ (j =0):

$$k_{a1} = \sum_{i=2}^{n_1} k_{azi} = (m/2)\sum_{i=2}^{n_1} 1/[i^2+(m/2)^2]^{3/2}\,. \qquad (40)$$

- Cho các điện tích nằm trên đường 0P:

$$k_{a2} = \sum_{i=j=2}^{n_1} k_{azij}, \qquad (41)$$

- Cho các điện tích nằm trong góc $P0X$:

$$k_{a3} = \sum_{\substack{i=3\\ j=2}}^{\substack{n_1\\ i-1}} k_{azij}. \qquad (42)$$

Và cùng với điện tích tại chính gốc tọa độ 0, thay $i = j$ =1 vào (38) ta có:

$$k_{ao} = (2/m)^2. \qquad (43)$$

Tổng cộng ta được:

$$k_z = 2k_{az} = 2(k_{ao} + 4(k_{a1} + k_{a2}) + 8k_{a3}). \qquad (44)$$

Thay (45) vào (28) ta tính được γ_z. Kết quả tính toán γ_z (%) đối với điểm này, với độ chính xác tới số hạng thứ 5 sau dấu phẩy, được cho trong Bảng 1.

Bảng 1.

m \ n_1	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
5	- 0,45054	- 0,22131	- 0,04496	- 0,02245	-0,004441	-0,002190
10	- 0,90118	- 0,45038	- 0,09004	- 0,04502	-0,009003	-0,004502
100	- 8,97479	- 4,49914	- 0,90037	- 0,45018	-0,090029	-0,045016
1000	-66,70343	-40,98353	- 8,96678	- 4,49712	-0,900288	-0,450156
10000	-	-	-66,67034	-40,96825	-8,965979	-4,496922

Từ kết quả tính toán này ta có một số nhận xét sau đây:

- Tất cả các kết quả đều mang dấu (-) chứng tỏ $k_z < 4\pi$;
- γ_z hoàn toàn tỷ lệ thuận với m khi $n_1 > 5000$;
- Khi $n_1 \to \infty$ thì $\gamma_z \to 0$, do đó theo (34) thì $k_z \to 4\pi$, tức là trùng với kết quả tính theo mô hình phân bố liên tục;
- Với mọi $n_1 = (n+1)/2$ hữu hạn và $(n_1/m) > 5$ ta có công thức gần đúng (theo %):

$$\gamma_z \approx 90{,}031h/L \approx 90h/L = 90h/nd = 90m/(2n_1\text{-}1). \qquad (45)$$

Như vậy, để có được sai số $\gamma_z = 10^{-6} = 10^{-4}\%$ thì tụ điện cần phải có tỷ lệ kích thước h/L không lớn hơn $10^{-4}/90 \approx 10^{-6}$. Có nghĩa là nếu khoảng cách giữa 2 má tụ là 0,1m thì bề rộng của nó L phải lớn hơn 100 km! Nếu tỷ lệ này trong thực tế chỉ đạt cỡ 10^{-2} thì γ_z không thể nhỏ hơn 0,9%. Đây chính là thành phần sai số hệ thống không được tính đến trong các phép đo. Nó lớn hơn sai số đo được coi là "đã được đánh giá" vào cỡ $0{,}9/10^{-4}$ = 9000 lần!

+ Với các điểm khác ($z \neq h/2$) ta đặt $z = ah$, với $a = 0 \div 1$ nên chỉ cần thay a vào vị trí hệ số (1/2) trong các biểu thức (35), (36) và (37), ta được:

$$k_{axij} = k_{bxij} = (i\text{-}1)/[(i\text{-}1)^2 + (j\text{-}1)^2 + (am)^2]^{3/2}, \qquad (46)$$

$$k_{ayij} = k_{byij} = (j\text{-}1)/[(i\text{-}1)^2 + (j\text{-}1)^2 + (am)^2]^{3/2}, \qquad (47)$$

$$k_{azij} = k_{bzij} = am/[(i\text{-}1)^2 + (j\text{-}1)^2 + (am)^2]^{3/2}. \qquad (48)$$

Các biểu thức (38), (39) vẫn đúng trong trường hợp này. Chỉ có k_z là phải xác định bằng tổng:

$$k_z = k_{az} + k_{bz.} \tag{49}$$

Tương tự như các biểu thức từ (41) đến (44) đối với má tụ *A*, ta có thể xác định được các đại lượng đó đối với má tụ *B*. Còn tổng hợp lại ta được:

$$k_z = k_{ao} + 4(k_{a1} + k_{a2}) + 8k_{a3} + k_{bo} + 4(k_{b1} + k_{b2}) + 8k_{b3}. \tag{50}$$

Rõ ràng trong trường hợp này, thời gian tính toán sẽ tăng gấp đôi so với trường hợp trước. Thay (50) vào (33) ta tính được γ_z. Kết quả tính toán $\gamma_z(\%)$ đối với các điểm trên trục này với $m = 10$ và chính xác tới số hạng thứ 6 sau dấu phẩy, được cho trong Bảng 2. Với giá trị *m* khác, có thể ngoại suy từ (44).

Từ kết quả tính toán này ta có một số nhận xét sau đây:

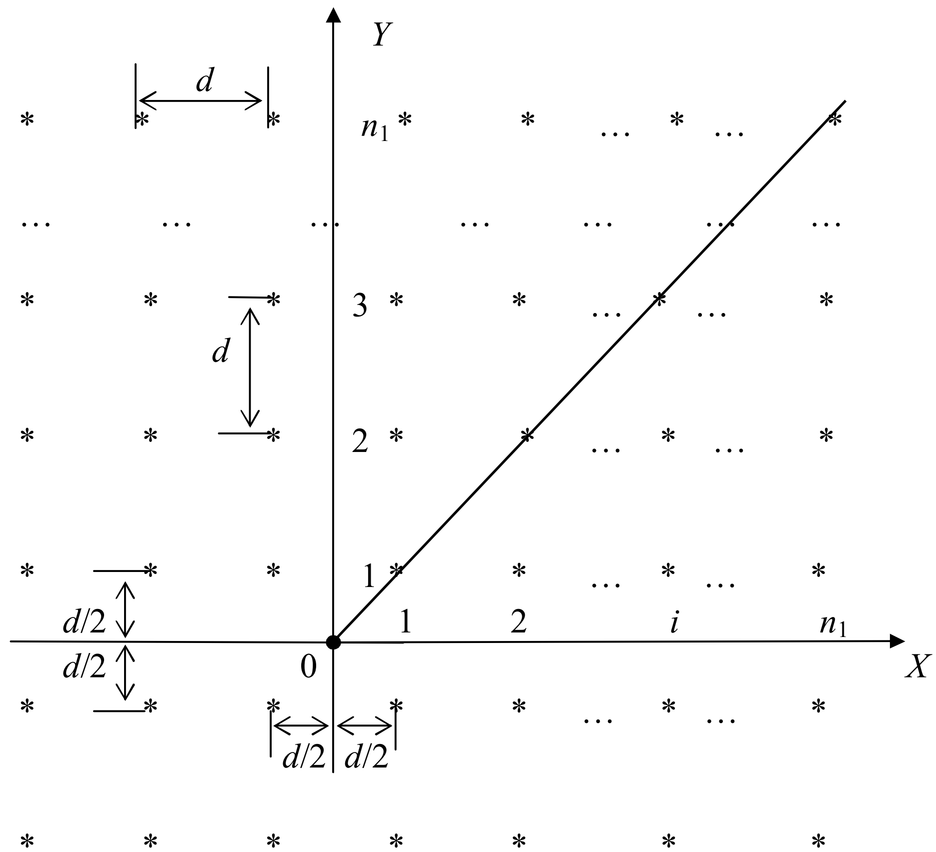
- Càng gần bề mặt má tụ ($a \to 0$) γ_z càng lớn, càng gần điểm giữa hai má tụ ($a \to 0{,}5$) γ_z càng nhỏ và ngay tại điểm giữa này, γ_z đạt cực tiểu.
- Tính đồng nhất của điện trường hoàn toàn bị phá vỡ tại khoảng cách dưới 10%*h* ngay sát má tụ ($a = 0 \div 0{,}1$).
- γ_z tỷ lệ nghịch với n_1, tức là tỷ lệ nghịch với độ rộng má tụ (*L*) chỉ trong phạm vi cách xa hai má tụ trên 10%*h*. Từ khoảng cách dưới 10%*h* tới bề mặt tụ, γ_z > +752% và hầu như không phụ thuộc vào n_1.

Bảng 2

a \ n_1	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
0,01	+ 752,0	+ 752,0	+ 752,7	+ 752,8	+ 752,9	+752,9
0,10	- 0,49893	- 0,04819	+0,31214	+0,35715	+0,39317	+0,39768
0,20	- 0,90144	- 0,44967	- 0,08934	- 0,04432	- 0,00830	- 0,00380
0,30	- 0,90116	- 0,45038	- 0,09004	- 0,04502	- 0,00900	- 0,00450
0,40	- 0,90118	- 0,45039	- 0,09004	-- 0,04502	- 0,00900	- 0,00450
0,50	- 0,90118	- 0,45038	- 0,09004	- 0,04502	- 0,00900	- 0,00450

b) Trục 0Z đi qua điểm giữa của 4 điện tích liền kề

Với các điểm loại này (xem Hình 4), ta có thể thấy hệ trục toạ độ *X0Y* chia mặt phẳng tụ thành 4 phần hoàn toàn bằng nhau. Trong mỗi phần, đường phân giác $0P$ lại chia nó ra làm 2 phần bằng nhau nữa, do vậy, cũng giống như trường hợp a) ta có: $k_x = k_y = 0$, chỉ còn $k_z = k_{az} + k_{bz}$.



Hình 4. Trục 0Z đi qua điểm giữa 4 điện tích kế cận.

Ta chỉ cần tính 2 tổng:

$$k_{az} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n_1} k_{azij}, \qquad (51)$$

và:

$$k_{bz} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n_1} k_{bzij}, \qquad (52)$$

trong đó, tương tự như (37), ta có thể viết:

$$k_{azij} = k_{bzij} = am/[(i\text{-}1/2)^2 + (j\text{-}1/2)^2 + (am)^2]^{3/2}. \qquad (53)$$

Mỗi tổng (51) và (52) ta lại có thể biểu diễn bằng 2 tổng tương tự như (42) và (43) chỉ khác ở giới hạn của các biến i và j, lúc này là $n_1 = n/2$, và tổng (42) gộp vào tổng (43) thành tổng (53), còn tổng (40) không có:

$$k_{a2} = \sum_{\substack{i=2 \\ j=1}}^{\substack{n_1 \\ i-1}} k_{azij}\ , \qquad (54)$$

$$\mathrm{k}_{\mathrm{a1}} = \sum_{\mathrm{i}=\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}_1} \mathrm{k}_{\mathrm{azij}}\ , \qquad (55)$$

Tổng hợp lại ta được: $k_{az} = 4k_{a1} + 8k_{a2}$. (56)

$$k_{bz} = 4k_{b1} + 8k_{b2}. \qquad (57)$$

Ta cũng tiến hành tính cho điểm giữa hai má tụ, ứng với a = 0,5 và có kết quả tương tự như Bảng 1, ta có Bảng 3. Với các điểm khác trên trục giữa với m = 10, ta có Bảng 4.

Vì trong hai trường hợp a) và b), số lượng điện tích N không thể như nhau với cùng giá trị n_1 nên có sự sai khác giữa các số liệu của hai Bảng 1 và Bảng 3 – Bảng 2 và Bảng 4, tuy nhiên, với độ chính xác tới số hạng thứ 4 sau dấu phẩy, ta có thể nói là các kết luận ở mục a) cũng đúng đối với mục này chỉ khác dấu (-) của γ_z tại a = 0,01.

Bảng 3.

m \ n_1	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
5	- 0,45021	- 0,22514	- 0,04508	- 0,02257	- 0,00456	-0,002311
10	- 0,90028	- 0,22514	- 0,09003	- 0,04502	- 0,00900	-0,004502
100	- 8,96589	- 4,49690	- 0,90028	- 0,45015	- 0,09003	-0,045016
1000	- 0,66666	- 0,96655	- 8,96589	- 4,49690	- 0,90028	-0,450153

Bảng 4.

a \ n_1	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
0,01	38,03241	37,58238	37,22227	37,17725	37,141239	37,136737
0,10	- 1,24564	- 0,79558	- 0,43547	- 0,39045	-0,354439	-0,349934
0,20	- 0,90093	- 0,45084	- 0,09073	- 0,04571	-0,009697	-0,005195
0,30	- 0,90026	- 0,45015	- 0,09003	- 0,04502	-0,009004	-0,004503
0,40	- 0,90027	- 0,45015	- 0,09003	- 0,04502	-0,009004	-0,004502
0,50	- 0,90028	- 0,45015	- 0,09003	- 0,04502	-0,009004	-0,004502

3. Điện trường trên đường trục giữa song song với 2 má tụ

Theo đường này ta có: $y = L/2 = (n\text{-}1)d/2$, $z = h/2$, chỉ có x là biến. Đặt $h/d = m$, do đó $z/d = m/2$. Biểu diễn x qua một đại lượng tương đối (b)

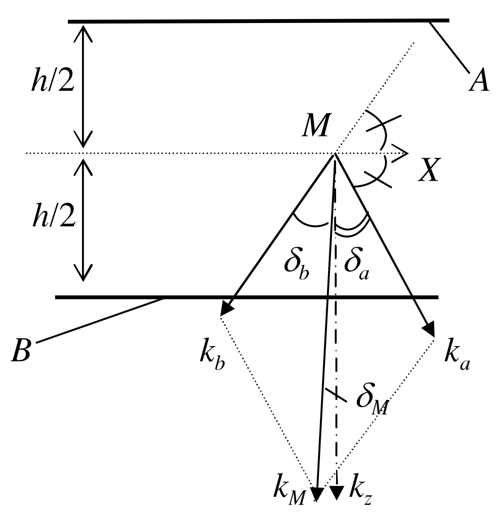
so với kích thước của tụ điện: $x = bL/2 = b(n\text{-}1)d/2$, do đó $x/d = b(n\text{-}1)/2$, ở đây chọn $b = 0\div2$ trong đó, điểm ứng với $b = 1$ là tâm đối xứng nên thực tế chỉ cần tính với $b = 0\div1$ hoặc $b = 1\div2$. Vì là đường đối xứng so với biến y nên tác động tổng hợp theo phương y sẽ triệt tiêu chỉ còn thành phần theo phương x và z, do đó giảm được 1/3 khối lượng tính toán. Mặt khác, vì $z = h/2$ nên tác động của 2 má tụ A và B theo phương z là hoàn toàn như nhau nên chỉ cần tính k_{az}, còn tổng tác động $k_z = 2k_{az}$. Sau khi thay các đại lượng tương ứng vào (14) và (16) ta có:

$$k_{bxij} = k_{axij} = [b(n\text{-}1)/2 - i]/[(b(n\text{-}1)/2 - i)^2 + (n/2 - j)^2 + m^2]^{3/2}, \qquad (58)$$

$$k_{bzij} = k_{azij} = m/[(b(n\text{-}1)/2 - i)^2 + (n/2 - j)^2 + m^2]^{3/2}, \qquad (59)$$

Thay các biểu thức này vào (17) và (19) ta được các giá trị k_{ax}, k_{az} và k_a, rồi từ đây thay vào (20) tính được δ_a. Cuối cùng, thay k_z vào (33), ta sẽ tính được γ_z. Kết quả tính toán với $m = 10$ được đưa vào Bảng 5. Lưu ý $k_a = k_b$ nhưng hướng tác động không trùng nhau mà hợp với nhau một góc bằng $2\delta_a$ như chỉ ra trên Hình 5, nên theo (22) ta có:

$$k_M = \sqrt{k_a^2 + 2k_ak_b\cos2\delta_a + k_b^2} = k_a\sqrt{2(1+\cos2\delta_a)}.$$



Hình 5.

Bảng 5

b \ n	1000	2 000	10 000	20 000	100 000
0,0	- 53,25427	- 53,53877	- 53,21872	- 53,20240	- 53,18850

0,1	- 3,579646	- 1,785929	- 0,356174	- 0,181240	- 0,035590
0,2	- 1,993626	- 0,995374	- 0,198835	- 0,099379	- 0,019873
0,3	- 1,479976	- 0,739307	- 0,147839	- 0,076509	- 0,014771
0,4	- 1,234043	- 0,616644	- 0,123335	- 0,064071	- 0,012325
0,5	- 1,095283	- 0,547414	- 0,109433	- 0,056804	- 0,010943
0,6	- 1,010452	- 0,505085	- 0,100999	- 0,052149	- 0,010099
0,7	- 0,957024	- 0,478426	- 0,095644	- 0,048968	- 0,009567
0,8	- 0,924096	- 0,462002	- 0,092387	- 0,046195	- 0,009239
0,9	- 0,906085	- 0,453028	- 0,090610	- 0,045301	- 0,009060
1,0	- 0,900280	- 0,450150	- 0,090030	- 0,045016	- 0,009003

Từ đây ta có nhận xét:

- Khi $m = 10$, với độ chính xác tới 2 chữ số có nghĩa (sai số xấp xỉ 1%), độ đồng nhất của điện trường theo hai phương $0X$ và $0Y$ được đảm bảo chỉ trong vùng giữa của tụ điện cách tâm tụ không quá $10\%L$;
- Khi $m > 10$, độ bất đồng nhất có thể được nội suy từ công thức (45).

III. KẾT LUẬN

1. Khái niệm "điện thế mặt" của tụ điện hoàn toàn không có nghĩa khi phân bố điện tích là rời rạc và do đó việc xác định cường độ điện trường thông qua điện thế này cũng không có nghĩa.
2. Độ bất đồng nhất của tụ điện phẳng thực tế lớn hơn rất nhiều so với các tính toán hay "đo đạc" từ trước tới nay. Sự sai lệch nhỏ nhất đạt được chỉ ở tại điểm chính giữa hai má tụ cũng có thể tới hàng chục ngàn lần.
3. Cần xem xét lại phép đo điện thế hay hiệu điện thế giữa 2 cái gọi là "điểm", bởi thật ra mỗi "điểm" này có thể chứa hàng vạn, hàng triệu… điện tích.